ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

вып. I6 1985

УДК 514.75

С.В. Киреева

О ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ СЕТЕЙ

В данной работе рассматривается в проективном пространстве отображение $g : \Omega \to \bar{\Omega}$, в котором каждая линия двойная, при этом области $\Omega < P_n$ и $\bar{\Omega} < P_n$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей.

Пусть задано отображение $g : (\Omega < P_n) \to (\bar{\Omega} < P_n) \mid A \to B \neq A$, в котором каждая линия двойная [I]. Области Ω и $\bar{\Omega}$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей

$$A \to \Pi_{n-1}(A), \tag{1}$$

$$B \to \Pi_{n-1}(B), \tag{2}$$

$\Pi_{n-1}(A) = \Pi_{n-1}(B)$. Мы будем рассматривать только такое отображение g, для которого касательные к соответствующим двойным линиям $\ell, \bar{\ell}$ пересекаются в точке, которая принадлежит нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$.

В области Ω задана сеть Σ_n, $\bar{\Sigma}_n$ – образ сети в отображении g. К областям Ω и $\bar{\Omega}$ присоединены подвижные реперы $\mathcal{R}^A = \{A, A_i\}$; $\mathcal{R}^B = \{B, B_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, где A_i, B_i – нормальные точки [3] касательных к линиям ω^i, $\bar{\omega}^i$ сетей $\Sigma_n, \bar{\Sigma}_n$. Для отображения g потребуем, чтобы инвариантные точки N_i^i $(i = 1, \dots, n)$ [4], лежащие на прямой (AB), совпадали с точкой $C = (AB) \cap \Pi_{n-1}(A)$ – точкой пересечения прямой (AB) и нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$. Тогда точки B, B_i в репере $\mathcal{R}^A$ имеют следующие представления

$$\vec{B} = \vec{A} + \gamma^i \vec{A}_i, \quad \vec{B}_i = \delta_i^j \vec{A}_j \tag{3}$$

В работе индексы $i, j, k, m, \dots$ пробегают значения $1, 2, \dots n$. Связь между формами реперов $\mathcal{R}^A, \mathcal{R}^B$ выражается следующими равенствами:

$$\bar{\omega}^i = \omega^i, \quad \bar{\omega}_i^0 = \omega_i^0,$$
$$\bar{\omega}_0^0 = \omega_0^0, \quad \bar{\omega}_j^i = \omega_j^i - \gamma^j \omega_i^0. \tag{4}$$

Формулы (4) являются частным случаем формул (4), (10), (11), (12), выведенных в работе [4], в предположении, что функции $\gamma_i^j = \delta_i^j$. В той же работе [4] даны разложения дифференциалов $d\gamma_i^j$:

$$d\gamma_j^i - \gamma_k^i \omega_j^k + \gamma_j^k \omega_k^i - (\gamma^k \gamma_j^i + \gamma^i \gamma_j^k)\omega_k^0 = \gamma_{jm}^i \omega^m; \ \gamma_{jm}^i = \gamma_{mj}^i. \tag{5}$$

В нашем случае $\gamma_j^i = \delta_j^i$ и формулы (5) примут вид:

$$-\delta_j^i \gamma^k \omega_k^0 - \gamma^i \omega_j^0 = \gamma_{jm}^i \omega^m; \quad \gamma_{jm}^i = \gamma_{mj}^i. \tag{5a}$$

В данной работе мы будем рассматривать такое отображение g, для которого все функции γ^i в разложении точки B не равны нулю: $\gamma^i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Так как области $\Omega, \bar{\Omega}$ нормализованы и в них заданы сети $\Sigma_n, \bar{\Sigma}_n$, то формы $\omega_i^0, \bar{\omega}_i^0, \omega_i^j, \bar{\omega}_i^j$ $(i \neq j)$ – главные:

$$\omega_i^0 = a_{ik}^0 \omega^k, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j \omega_0^k,$$
$$\bar{\omega}_i^0 = \bar{a}_{ik}^0 \omega^k, \quad \bar{\omega}_i^j = \bar{a}_{ik}^j \omega_0^k. \quad (i \neq j) \tag{6}$$

Из формул (5a), (6) и (4) следует, что

$$a_{jm}^0 = a_{mj}^0, \quad \bar{a}_{jm}^0 = \bar{a}_{mj}^0, \tag{7}$$

$$\gamma^k \omega_k^0 = 0. \tag{8}$$

Равенства (7) означают, что нормализации (1), (2) эквиаффинные.

Формы ω_k^0 связаны одним соотношением (8), поэтому множество $\{\Pi_{n-1}(A)\}$ нормализующих плоскостей существенно зависит от $(n-1)$ параметра.

Если при вычислении дифференциала dC [4] точки C воспользоваться формулой (8) и учесть, что $\gamma_i^j = \delta_i^j$, то $d\vec{C} = \varphi \vec{C}$ и, следовательно, множество $\{\Pi_{n-1}(A)\}$ нормализующих плоскостей образует связку с центром в точке С. Причем, если точка А смещается в направлении (АС) = (АВ), то нормализующая плоскость $\Pi_{n-1}(A)$ остается неподвижной. Тогда, как известно, направление (АВ) называется особым для нормализации (1). Направление (ВА) тоже будет особым для нормализации (2).

Т е о р е м а 1. Отображение g обладает следующими свойствами:

1) ранги нормализаций $A \to \Pi_{n-1}(A)$; $B \to \Pi_{n-1}(A)$ в общем случае равны $n-1$; 2) семейство нормализующих плоскостей образует связку с центром в точке С; 3) нормализации (1), (2) порождают эквиаффинные связности $\nabla, \overline{\nabla}$. Риманову связность нормализации порождать не могут; 4) тензоры кривизны и Риччи связностей ∇, $\overline{\nabla}$ совпадают; 5) распределения Δ_1, $\overline{\Delta}_1$ такие, что $\Delta_1(A) = (AB)$; $\overline{\Delta}_1(B) = (BA)$ являются особыми для нормализаций (1), (2); 6) если соприкасающиеся плоскости линий ω^i, $\overline{\omega}^i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) сетей $\Sigma_n, \overline{\Sigma}_n$ совпадают, то множество этих плоскостей образует пучок с осью (АВ), линии ω^i, $\overline{\omega}^i$ сетей $\Sigma_n, \overline{\Sigma}_n$ - плоские, лежащие в плоскостях (AA_iB).

Рассмотрим псевдофокусы F_i^j $(\overline{F}_i^j)$ на касательных (AA_i) $((BB_i))$ к линиям ω^i $(\overline{\omega}^i)$ сети Σ_n $(\overline{\Sigma}_n)$:

$$\vec{F}_i^j = -a_{ij}^j \vec{A} + \vec{A}_i \qquad \left(\vec{\overline{F}}_i^j = -(a_{ij}^j - \gamma^j a_{ij}^0)\vec{B} + \vec{B}_i\right).$$

Точка $\mathcal{K}_i^j = (AB) \cap (F_i^j \overline{F}_i^j)$ будет совпадать с точкой С тогда и только тогда, когда направления (AA_i), (AA_j) сопряжены относительно конуса Риччи. При этом прямые $(F_i^j F_j^i)$, $(\overline{F}_i^j \overline{F}_j^i)$ пересекаются в точке S_{ij}: $\vec{S}_{ij} = a_{ji}^i \vec{A}_i - a_{ij}^j \vec{A}_j$. Если направления (AA_i), (AA_j), (AA_k) (i, j, k -различные) попарно сопряжены относительно конуса Риччи, то

1) $\Delta S_{ij} S_{jk} S_{ki}$ перспективен $\Delta A_i A_j A_k$ тогда и только тогда, когда относительный инвариант $a_{ij}^j a_{jk}^k a_{ki}^i + a_{ik}^k a_{kj}^j a_{ji}^i$ равен нулю; 2) точки S_{ij}, S_{jk}, S_{ki} лежат на одной прямой, если относительный инвариант $a_{ij}^j a_{jk}^k a_{ki}^i - a_{ik}^k a_{kj}^j a_{ji}^i$ равен нулю.

Можно показать, что справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. n-сопряженная система двойных линий при отображении g перейдет в n-сопряженную систему тогда и только тогда, когда касательные к линиям сети Σ_n сопряжены относительно конуса Риччи. При этом фокусы $F_i^j, \overline{F}_i^j$ соответствуют в гомографии, которая определяется парой реперов $\mathcal{R}^A$, $\mathcal{R}^B$. Прямые, соединяющие соответствующие фокусы $F_i^j, \overline{F}_i^j$, принадлежат связке с центром в неподвижной точке С.

Т е о р е м а 3. Геодезическая сеть Σ_n двойных линий перейдет при отображении g в геодезическую тогда и только тогда, когда сеть Σ_n -характеристическая. При этом все прямые (AA_i) лежат на конусе Риччи связности ∇.

Список литературы

1. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 1975,вып.6,с.19-25.

2. Базылев В.Т. Многомерные поверхности,сети и дифференцируемые отображения пространств.Уч.зап.МГПИ им. В.И.Ленина,1970,№ 374,т.I,с.28-40.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности.М., Наука,1976.

4. Киреева С.В. О паре сетей.Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,1983,вып.14, с.26-31.